

Mathematics

מבנים מתמטיקה

חוברת תרגילים

יסודות ההסתברות

- קומבינטוריקה
- מאורעות בלתי-תלויים, משלימים, זרים
- פונקציית הסתברות
- הסתברות מותנית
- הסתברות שלמה
- בייס

תוכן עניינים

- שאלה מספר 1 – קומבינטוריקה..... 2
- שאלה מספר 2 – קומבינטוריקה..... 2
- שאלה מספר 3 – מאורעות משלימים מותנים ובלתי תלויים..... 2
- שאלה מספר 4 – חיתוך ואיחוד מאורעות..... 2
- שאלה מספר 5 – מאורעות זרים ובלתי תלויים..... 3
- שאלה מספר 6 – תרומה לצדקה..... 3
- שאלה מספר 7 – גולה זהובה..... 3
- שאלה מספר 8 – כיוון הזמן..... 4
- שאלה מספר 9 – שעון עתיק..... 4
- שאלה מספר 10 – קובייה הוגנת..... 4

שאלה מספר 1 – קומבינטוריקה

n ילדים סודרו באקראי בספסל בן n מושבים.

(א) מהי ההסתברות ששמעון וגדעון שכנים?

(ב) מהי ההסתברות ששמעון וגדעון לא שכנים?

שאלה מספר 2 – קומבינטוריקה

זורקים קובייה הוגנת פעמיים.

(א) מהי ההסתברות שהסכום יהיה גדול או שווה ל-9?

(ב) מהי ההסתברות שבשתי הזריקות התקבל מספר זוגי?

(ג) מה ההסתברות שבשתי הזריקות התקבל אותו מספר?

שאלה מספר 3 – מאורעות משלימים ובלתי תלויים

עבור שני המאורעות A ו- B , הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

$$P(A^c | B) = 1 - P(A | B) \quad (\text{א})$$

$$P(A | B^c) = 1 - P(A | B) \quad (\text{ב})$$

(ג) אם A ו- B בלתי-תלויים אזי גם A^c ו- B^c בלתי-תלויים.

שאלה מספר 4 – חיתוך ואיחוד מאורעות

יהיו A ו- B מאורעות המקיימים: $P(A) + P(B) = 1$.

הוכח כי: $P(A \cap B) = P(A^c \cap B^c)$.

שאלה מספר 5 – מאורעות זרים ובלתי תלויים

עבור שני המאורעות A ו- B , הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

(א) אם A ו- B גם זרים וגם בלתי-תלויים, אזי: $P(A) = 0$ או $P(B) = 0$.

(ב) A בלתי-תלוי בעצמו אם"מ $P(A) = 0$ או $P(A) = 1$.

שאלה מספר 6 – תרומה לצדקה

אדם מחליט לתרום כל יום לצדקה שקל אחד או כלום.

כל יום הוא שולף כדור אחד באקראי משק שבו ישנם 10 כדורים ממסופרים מ-1 עד 10. אם הוא שלף

את כדור מספר k ($k = 1, 2, \dots, 10$) הוא תורם שקל אחד בהסתברות $p = \frac{k}{10}$.

(א) מהי ההסתברות שביום מסוים האדם יתרום שקל אחד?

(ב) אם האדם תרם שקל אחד, מהי ההסתברות שהוא שלף את כדור מספר 6?

(ג) אם האדם לא תרם, מהי ההסתברות שהוא שלף את כדור מספר 6?

(ד) אם ידוע שביום מסוים הוא לא שלף את כדור מספר 6, מהי ההסתברות שהוא לא תרם?

שאלה מספר 7 – גולה ירוקה

בכד מונחת גולה ירוקה ומוסיפים לה מספר אקראי של גולות כחולות, כאשר ההסתברות לכך שמספר

הגולות הכחולות שמתווספות הוא k , נתונה על-ידי aq^k , $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $a > 0$, $0 < q < 1$.

(א) מצא את a .

(ב) מהי ההסתברות להוציא גולה ירוקה מהכד?

(ג) מהי תוחלת הגולות הכחולות שהתווספו לכד?

שאלה מספר 8 – כיוון הזמן

מוציאים מכד המכיל כדורים שחורים ולבנים 2 כדורים ללא החזרה. נגדיר את המאורעות:

$$B_i = \{\text{הוצאת כדור שחור בפעם ה- } i\}$$

$$W_i = \{\text{הוצאת כדור לבן בפעם ה- } i\}$$

(א) הוכח: $P(B_1) = P(B_2)$

(ב) הוכח: $P(W_2 | B_1) = P(W_1 | B_2)$

שאלה מספר 9 – שעון עתיק

שעון עתיק מורכב בין היתר משלושה רכיבים עיקריים: קפיץ, גלגלת ראשית ואבן קוורץ. ידוע כי אבן הקוורץ בלתי-תלויה בקפיץ ובלתי-תלויה בגלגלת הראשית, וכמו-כן הגלגלת הראשית בלתי-תלויה בקפיץ. השעון התקלקל ומנסים לאתר את התקלה. נסמן שלושה מאורעות:

$$A = \{\text{התקלה בקפיץ}\}, B = \{\text{התקלה בגלגלת הראשית}\}, C = \{\text{התקלה באבן הקוורץ}\}$$

$$P(A) = 0.2, P(B) = 0.3, P(C) = 0.1 \quad \text{מתקיים:}$$

כמו-כן נתון שההסתברות שהתקלה תימצא או בקפיץ או בגלגלת הראשית או באבן הקוורץ שווה ל- 0.5.

- (א) מהי ההסתברות שהסיבה לתקלה תימצא או בקפיץ או בגלגלת הראשית?
 (ב) מהי ההסתברות שהסיבה לתקלה תימצא גם בקפיץ, גם בגלגלת הראשית וגם באבן הקוורץ בו-זמנית?
 (ג) בהינתן שהתקלה נמצאת או בגלגלת הראשית או באבן הקוורץ, מהי ההסתברות שגם הקפיץ תקול?

שאלה מספר 10 – מכונת מספרים

מכונה מייצרת באקראי ובאופן בלתי תלוי סדרה של מספרים המורכבת מהספרות 0, 1 או 2 בלבד (למשל: ...011021021). נגדיר:

$$X = \{\text{מיקום האיבר בסדרה בו לראשונה מתקבלת ספרה שכבר הופיעה}\}$$

(א) מצא את פונקציית ההסתברות של X .

(ב) מצא את התוחלת של X .

(ג) מצא את השונות של X .